8-10-18

Αρχή της Επαγωγής

Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε μια πρόταση P_n.

Έστω ότι: (i) P_1 αληθής.

Βήμα της Επαγωγής ← (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n αληθης $\Rightarrow$ P_{n+1} αληθής)

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n είναι αληθης

Αποδεικνύεται ότι η αρχή της επαγωγής είναι ισοδύναμη με τη Αρχή της Καλής Διάταξης στους φυσικούς → Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Παραδείγματα

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+2+3+\dots+n = \frac{(n+1)n}{2}$

Για $n=1$ → $1 = \frac{(1+1)\cdot 1}{2}$ | ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή $1+2+..+k=\frac{(k+1)k}{2}$

Αρκεί νδο ισχύει για $n=k+1$, δηλ. $1+2+..+k+(k+1)=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$

Από την επαγωγική υπόθεση $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$

$\rightarrow (1+2+...+k)+(k+1)$

$=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Αποδείχθηκε.

2) $\underbrace{1^2+2^2+3^3+...+n^2}_{\sum_{i=1}^{n} i^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Θα αποδείξαμε την ταυτότητα με επαγωγή πάνω στο n

Για $n=1$, $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

Έστω ότι ισχύει για $n=k$,

δηλ. $1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ $|\, k\in N$

Αρκεί νδο. $(1^2+2^2+...+k^2)+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}=$

$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Από επαγωγική υπόθεση

$(1^2+...+k^2)+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} =$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$\boxed{(k+2)(2k+3)=2k^2+7k+6}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+\dots+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Αποδείχθηκε $\forall\ k\in\mathbb{N}$

3) Ανισότητα Bernoulli

$\forall\ x\geq -1,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

Απόδειξη

Για $n=1$, $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$, $\forall\ x\geq -1$

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k\in\mathbb{N}$,

δηλ. $(1+x)^k \geq 1+kx$

Αρκεί νδο $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, $\forall\ x\geq -1$

Έστω $x\geq -1$. Από επαγωγική υπόθεση: $(1+x)^k \geq 1+kx$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$

$1+x+kx+kx^2 =$

$1+(k+1)x+kx^2 \mid kx^2\geq 0$

$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$

Πάντα $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$

Ορισμός

Έστω $M \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$

(i) το M λέγεται άνω φράγμα του A όταν $\forall x \in A$, $x \leq M$.

πχ. (i) $(0,1)$ | άνω φράγματα του $(0,1) \to 1, 1039, 2, 7.85$

$-1, 1/2, 0 \to$ όχι άνω φράγματα του $(0,1)$

• Το $(0,+\infty)$ δεν έχει άνω φράγμα.

- Αν ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει άνω (κάτω) φράγμα, τότε έχει άπειρα άνω (κάτω) φράγματα.
- Αν το A έχει άνω φράγμα, λέγεται άνω φραγμένο
- Αν το A έχει κάτω φράγμα, λέγεται κάτω φραγμένο

(ii) Το μ λέγεται κάτω φράγμα του A αν $\forall x \in A$, $\mu \leq x$

πχ. $A = (-3, 7]$ | $-3, -4, -5.67 \to$ κάτω φράγμα του A.

$3, 7 \to$ όχι κάτω φράγμα του A.

Ορισμός

Αν A άνω φραγμένο κ' κάτω φραγμένο, τότε το A λέγεται φραγμένο

πχ. $(-3, 7] \to$ φραγμένο

$\mathbb{N} \to$ μη φραγμένο (κάτω φραγμένο, αλλά όχι άνω φραγμένο)

- A φραγμένο αν $\exists\, M \geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$, $|x| \leq M$

Απόδειξη

- $\exists\, M \geq 0$, τέτοιο ώστε $\forall\, x \in A$, $|x| \leq M$

$-M \leq x \leq M \to$ άνω φράγμα του A
↳ κάτω φράγμα του A

- A φραγμένο $\to \exists\, \mu, M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$, $\mu \leq x \leq M$.

Θέτω $K = \max\{|\mu|, |M|\}$

Τότε
- $K \geq |\mu| \underset{K \geq 0}{\Rightarrow} -K \leq \mu \leq x$, $\forall\, x \in A$
- $K \geq |M| \geq M \geq x \Rightarrow -K \leq x \leq K \Rightarrow |x| \leq K$, $\forall\, x \in A$.

Ορισμός

Έστω $a \in A$. Το a λέγεται μέγιστο στοιχείο του A και συμβολίζεται $a = \max$ όταν $x \leq a$, $\forall\, x \in A$. Το a λέγεται ελάχιστο στοιχείο του A και συμβολίζεται $a = \min$ όταν $x \geq a$, $\forall\, x \in A$.

$A = [1, 2]$ | $\min A = 1$, $\max A = 2$

$A = (1, 2)$ | δεν έχει μέγιστο και ελάχιστο

- $2 \to$ άνω φράγμα του $A \to$ το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

Ορισμός

Έστω $A \neq 0$, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του A ονομάζεται supremum του A και συμβολίζεται $\sup A$.

Αξίωμα της πληρότητας ή του ανεχαίς:
Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum

Παρατήρηση
Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο τότε $\max A = \sup A$

Πρόταση
Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ $[A \neq \emptyset]$ άνω φραγμένο, τότε $\sup A$ είναι μοναδικό

Απόδειξη
Έστω M_1, M_2 δύο supremum του A
Από τον ορισμό:
i) M_1 άνω φράγμα του A
ii) $\forall$ άνω φράγμα M του A. $M_1 \leq M$
το M_2 είναι άνω φράγμα του A. Άρα $M_1 \leq M_2$ ομοίως $M_2 \leq M_1$
Άρα $M_1 = M_2$